Une approche algébrique pour la commande des systèmes linéaires à retards de type neutre

Michaël Di Loreto, Jean-Jacques Loiseau, Jean-François Lafay

Une approche algébrique pour la commande des systèmes linéaires à retards de type neutre

Michaël Di Loreto[1], Jean Jacques Loiseau[2], et Jean-François Lafay[2]

[1]Laboratoire Ampère, CNRS-UMR-5005, INSA-Lyon, 20 Avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne, France

Michael.Di-Loreto@insa-lyon.fr

[2]IRCCyN, CNRS-UMR-6597
Ecole Centrale de Nantes, Université de Nantes, Ecole des Mines de Nantes
1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes cedex 03, France

Jean-Jacques.Loiseau@irccyn.ec-nantes.fr, Jean-Francois.Lafay@irccyn.ec-nantes.fr

Résumé— **On s'intéresse dans ce papier à la définition d'un cadre algébrique pour la résolution de problèmes de commande pour les systèmes à retards de type neutre. Les problèmes de commande abordés sont la stabilisation, le suivi de trajectoire, et le rejet de perturbation. Le schéma de compensation retenu permet d'inclure une large classe de schémas linéaires et dynamiques. Chacun de ces problèmes est résolu de manière algébrique. On met en évidence la structure de la compensation à partir d'invariants structurels, afin qu'une solution aux problèmes mentionnés cidessus existe. Enfin, un lien avec le principe du modèle interne est réalisé.**

Mots-clés— **système à retard, type neutre, approche algébrique, stabilité, commande, modèle interne.**

I. Introduction

Dans ce papier, on s'intéresse à la commande robuste de systèmes de type neutre de la forme,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= E(\dot{x}(t)) + A(x(t)) + B(u(t)) & (1)\\ y(t) &= C(x(t)) + D(u(t)) & (2) \end{aligned}$$

où (A, B, C, D, E) est un quintuplet d'opérateurs linéaires qui incluent des retards commensurables à $\theta > 0$ et un retard distribué, c'est-à-dire que ces opérateurs peuvent s'écrire

$$A(x(t)) = \sum_{i=0}^{\nu} A_i x(t - i\theta) + \int_0^{\nu\theta} F_A(\tau) x(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

avec $A_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pour $i = 0$ à ν, $F_A(\cdot)$ une matrice de fonctions continues par morceaux dont les sauts de discontinuité adviennent aux instants $k\theta$, pour certains entiers k entre 0 et ν. L'élément $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état instantané du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ est l'entrée, alors que $y(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie [1], [2]. On supposera dans la suite que le quintuplet d'opérateurs définissant (1)-(2) possède les dimensions adéquates. Afin d'éviter le cas d'un système à retard implicite de type neutre, pour lequel une solution peut être non définie, l'opérateur E dans (1) est tel que E_0 est la matrice identiquement nulle.

L'équation caractéristique en boucle ouverte de (1) est

$$\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = 0, \tag{3}$$

avec

$$\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \det\left(s(I - \hat{E}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})) - \hat{A}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})\right). \tag{4}$$

Les éléments $\hat{E}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ et $\hat{A}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ sont respectivement les transformées de Laplace des opérateurs $E(\cdot)$ et $A(\cdot)$. En développant le déterminant dans (4), $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ s'écrit sous la forme générale

$$\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \sum_{i=0}^{q}\sum_{k=0}^{r} \Delta_{ik} s^i \mathrm{e}^{-k\theta s}, \tag{5}$$

où $\Delta_{ik} \in \mathbb{R}$, pour $i = 0$ à q et $k = 0$ à r, avec q et r deux entiers relatifs. L'élément $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est un quasipolynôme défini sur $\mathbb{R}[s, \mathrm{e}^{-\theta s}]$, l'anneau des polynômes à coefficients réels à deux variables s et $\mathrm{e}^{-\theta s}$. Le coefficient dominant en s de $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est un polynôme à coefficients réels en la variable $\mathrm{e}^{-\theta s}$. Il est appelé la partie principale de $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$, et il est noté $\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s})$, c'est-à-dire

$$\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s}) = \sum_{k=0}^{r} \Delta_{qk} \mathrm{e}^{-k\theta s}. \tag{6}$$

Le coefficient Δ_{q0} est appelé le terme principal de $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$. On dit que $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ a un terme principal si $\Delta_{q0} \neq 0$. Le quasipolynôme $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est unitaire (en s), si $\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s})$ est unitaire sur $\mathbb{R}$, autrement dit si $\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s}) = 1$. Avec ces définitions, il est immédiat de constater qu'un quasipolynôme unitaire a un terme principal.

Afin de poser le cadre de la stabilisation, il est donc nécessaire, au préalable, de clarifier certaines définitions. La notion de stabilité exponentielle est reliée à la localisation des racines de (4) dans le plan complexe.

Définition I.1: [3] Le système (1)-(2) est dit (exponentiellement) stable si il existe $\delta < 0$ tel que

$$\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \neq 0,\ \forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) \geq \delta. \tag{7}$$

Parallèlement à la stabilité exponentielle, plusieurs auteurs ont considéré une notion moins conservative, à savoir la stabilité formelle [4], [5]. On dit que le système (1)-(2) est formellement stable si

$$\mathrm{Rang}\left(I - \hat{E}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})\right) = n, \;\; \forall s \in \mathbb{C},\; \mathrm{Re}(s) \geq 0.$$

Si le système est formellement stable, (3) a un nombre fini de racines dans le demi-plan droit fermé complexe [3]. Si le quasipolynôme $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ n'a pas de terme principal, ou si sa partie principale n'est pas stable, (3) a un nombre infini de racines instables. Le système (1)-(2) est formellement stable si et seulement si la partie principale de $\Delta(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$, $\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s})$, est un polynôme stable en $\mathrm{e}^{-\theta s}$, c'est-à-dire qu'il existe $\mu < 0$ tel que

$$\mathrm{pp}(\Delta)(\mathrm{e}^{-\theta s}) \neq 0,\; \forall s \in \mathbb{C},\; \mathrm{Re}(s) \geq \mu.$$

Pour formaliser le cadre mathématique de l'étude de la stabilisation, de nombreux auteurs ont mis en évidence l'intérêt d'utiliser des retards distribués dans les lois de commande [6]. Un retard distribué est une relation entrée-sortie définie par une convolution de la forme

$$y(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\tau) u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

où le noyau f et l'entrée u sont supposés admettre des transformées de Laplace au sens des distributions, et $0 \leq \theta_1 < \theta_2$. La transformée de Laplace du noyau de convolution $f(t)$ est une fonction entière. Pour l'étude des systèmes à retards commensurables, on se restreint à l'étude des fractions rationnelles réelles en les variables s et $\mathrm{e}^{-\theta s}$. Ce corps des fractions est noté $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$. L'anneau $\mathcal{G}$ des retards distribués dont les transformées de Laplace sont dans $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ a été caractérisé dans [7]. Il est montré que tout élément $g(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathcal{G}$ s'écrit sous la forme

$$g(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \frac{n(s, \mathrm{e}^{-\theta s})}{d(s)}, \tag{9}$$

où $n(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathbb{R}[s, \mathrm{e}^{-\theta s}]$, $d(s) \in \mathbb{R}[s]$, et $g(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est une fraction rationnelle entière, qui est strictement propre par rapport à s.

A partir de cette caractérisation, les auteurs considèrent des opérateurs linéaires qui incluent un nombre fini de dérivateurs, retards ponctuels, et retards distribués. En d'autres termes, ils définissent l'ensemble

$$\mathcal{E} = (\mathbb{R}[\mathrm{e}^{-\theta s}] + \mathcal{G})[s]. \tag{10}$$

Tout élément $p(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathcal{E}$ est appelé pseudopolynôme. Il est montré que $\mathcal{E}$ est un anneau de Bézout [7]. A partir de (9) et (10), tout pseudopolynôme $p(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathcal{E}$ est une fonction entière, et s'écrit

$$p(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \frac{n(s, \mathrm{e}^{-\theta s})}{d(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} n_i(\mathrm{e}^{-\theta s}) s^i}{\sum_{i=0}^{t} d_i s^i}, \tag{11}$$

où $n_i(\mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathbb{R}[\mathrm{e}^{-\theta s}]$ pour $i = 0$ à r, et $d_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 0$ à t. Le degré de $p(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est défini par $\deg(p) = \deg_s(n) - \deg_s(d)$, qui est égal à $(r - t)$ si $n_r \neq 0$ et $d_t \neq 0$. Les définitions de pseudopolynôme unitaire ou de partie principale sont les extensions naturelles de celles introduites pour les quasipolynômes sur $\mathbb{R}[s, \mathrm{e}^{-\theta s}]$.

Puisque $\mathcal{E}$ est un anneau de Bézout, les notions de diviseur, multiple, et primarité sont bien définies. Sous l'hypothèse que les pseudopolynômes p_1 et p_2 sont premiers, il existe deux pseudopolynômes x_1 et x_2 tels que

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = 1. \tag{12}$$

Sur $\mathcal{E}$, la division de deux pseudopolynômes a un sens si le diviseur est unitaire. Lorsque ce diviseur n'est pas unitaire, mais a seulement un terme principal, cette division conduit à un quotient et un reste qui ne sont plus des pseudopolynômes. Tout élément $t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ peut se mettre sous la forme

$$t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \frac{n_t(s, \mathrm{e}^{-\theta s})}{d_t(s, \mathrm{e}^{-\theta s})}, \tag{13}$$

où $n_t(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ et $d_t(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ sont des pseudopolynômes premiers entre eux. Avec la notation introduite dans (13), nous obtenons le résultat suivant.

Lemme I.2: [8] Soient x et y deux pseudopolynômes, où y a un terme principal. Il existe q et r sur $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$, avec d_q et d_r deux pseudpolynômes à termes principaux, avec $\deg(r) < \deg(y)$, tels que

$$x = qy + r. \tag{14}$$

Pour l'analyse de la stabilité des systèmes de type neutre, la définition de stabilité reste identique à celle introduite dans la Définition I.1.
Le sous-anneau de $\mathcal{E}$ des pseudopolynômes stables est noté $\mathcal{E}_s$. On peut remarquer que, étant donné un pseudopolynôme stable y, $\mathrm{pp}(y)$ est un polynôme stable en la variable $\mathrm{e}^{-\theta s}$, à savoir il existe $\mu < 0$ tel que

$$\mathrm{pp}(y)(\mathrm{e}^{-\theta s}) \neq 0,\; \forall s \in \mathbb{C},\; \mathrm{Re}(s) \geq \mu. \tag{15}$$

Sous l'hypothèse que y soit stable, les éléments q et r du Lemme I.2 sont par construction des fractions stables, dans le sens que d_q et d_r sont des pseudopolynômes stables.

Avec ces outils, nous sommes désormais en mesure d'introduire le concept de fraction propre et stable. L'anneau $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ des fractions propres et stables de $\mathcal{E}$ est défini comme l'ensemble

$$\left\{\frac{p}{q} :\; p \in \mathcal{E},\; q \in \mathcal{E}_s,\; \deg(p) \leq \deg(q)\right\}. \tag{16}$$

L'ensemble $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ pour les lois additive et multiplicative usuelles. De manière plus générale, un élément $t = \frac{p}{q}$ dans $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est dit propre (respectivement strictement propre) si

1. $\deg(p) \leq \deg(q)$ (respectivement $\deg(p) < \deg(q)$),
2. q a un terme principal.

Le fait que $t(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ soit propre signifie que ce système peut être réalisé par un système à retards de type neutre de la forme (1)-(2), en utilisant un nombre fini d'intégrateurs, de retards ponctuels et distribués. Tout transfert $t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ admet une factorisation propre et stable [9]. Le point fondamental est cependant de savoir s'il existe une factorisation première qui soit propre et stable.

Parmi toutes les factorisations sur $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$, on cherche à déterminer les deux éléments $\tilde{n}$ et $\tilde{d}$ dans $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ tels que $t = \tilde{n}\tilde{d}^{-1}$, où $\tilde{n}$ et $\tilde{d}$ sont premiers entre eux. La primarité sur $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ est à comprendre au sens de l'absence de facteurs communs non triviaux. La réponse à cette question est double. Si le système est formellement stable, une telle factorisation existe toujours. Par contre, dans le cas de systèmes non formellement stables, une telle factorisation peut ne pas exister. Pour plus de détails sur ce point, on pourra se référer à [8]. On note $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'anneau des fractions stables de $\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$, de manière à ce que $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$ soit un sous-anneau de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Théorème I.3: [8] Toute fonction de transfert $t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) \in \mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$, ayant un dénominateur à partie principale, admet une factorisation première sur $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, c'est-à-dire qu'il existe une paire (p_c, q_c) sur $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$, telle que

$$t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = \frac{p_c(s, \mathrm{e}^{-\theta s})}{q_c(s, \mathrm{e}^{-\theta s})},$$

vérifiant l'identité $p_c a_c + q_c b_c = 1$, avec a_c et b_c définis sur $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.

Toutes ces notions se généralisent de manière évidente au cas matriciel, en distinguant en particulier la primarité à gauche de celle à droite.

II. Stabilisation des systèmes de type neutre

Le premier objectif de toute commande de système est la stabilisation. Rappelons brièvement quelques résultats récents sur ce sujet.

On considère le système en boucle fermée de la Figure 1. L'élément $P \in \mathbb{R}^{p\times m}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ est donné. On note respectivement e_2 et y_2 l'entrée et la sortie de ce système, et $e_1 \in \mathbb{R}^l$ l'entrée externe de commande. Un schéma générique de compensation linéaire et dynamique s'écrit

$$e_2 = C_1 e_1 - C_2 y_2, \qquad (17)$$

où $C_1 \in \mathbb{R}^{m\times l}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ et $C_2 \in \mathbb{R}^{m\times p}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$. Le compensateur (17) est appelé compensateur à deux paramètres. On définit $C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$, et on note $(\tilde{D}_c, \begin{pmatrix} \tilde{N}_{c_1} & \tilde{N}_{c_2} \end{pmatrix})$ une factorisation première stable à gauche de C, de manière à pouvoir écrire $C_1 = \tilde{D}_c^{-1}\tilde{N}_{c_1}$ et $C_2 = \tilde{D}_c^{-1}\tilde{N}_{c_2}$. En accord avec la notion de stabilité interne décrite par exemple dans [10] ou [11], on introduit la définition suivante.

Définition II.1: Le système bouclé de la Figure 1 est stable si la matrice de transfert $W(P, C)$ entre les entrées (u_1, u_2, u_3) et les sorties (y_1, y_2) est stable. On dit alors que la paire (P, C) est stable de manière interne.

Cette définition est une extension de la stabilité interne introduite pour les systèmes linéaires en dimension finie, ou de la stabilité entrée bornée-sortie bornée. En effet, une telle définition implique qu'un transfert non propre peut être stable de manière interne. Par exemple, le transfert

$$t(s, \mathrm{e}^{-\theta s}) = s + \frac{\mathrm{e}^{-\theta s}}{s+1}$$

est stable au sens interne introduit ci-dessus, alors que sa réponse impulsionnelle n'appartient pas à l'algèbre de

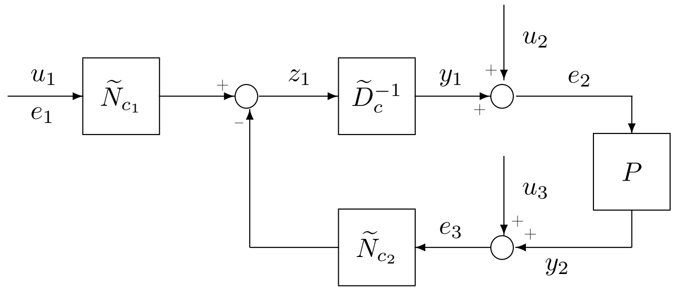

Figure 1. Système bouclé par un compensateur à deux paramètres.

Wiener. Avec (N_p, D_p) une factorisation première stable à droite de P, il est bien connu que la paire (P, C) est stable de manière interne si et seulement si la matrice

$$\Lambda(P, C) = \tilde{D}_c D_p + \tilde{N}_{c_2} N_p$$

est unimodulaire sur l'anneau $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ des fractions stables de $\mathcal{E}$. Cette condition nécessaire et suffisante permet d'aboutir à une paramétrisation de tous les compensateurs à deux paramètres qui stabilisent P au sens de la Définition II.1. On notera également que l'unimodularité de la matrice $\Lambda(P, C)$ est définie sur $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, et non pas sur $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$, comme cela advient pour les systèmes à retards de type retardé. Cependant, en utilisant les remarques faites avant le Théorème I.3, nous pouvons affirmer que pour un système à retards de type neutre P qui est formellement stable, alors la paire (P, C) est stable de manière interne si et seulement si $\Lambda(P, C)$ est unimodulaire sur $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}$. La condition de stabilité interne énoncée précédemment permet de caractériser l'ensemble des compensateurs stabilisants à deux paramètres.

Théorème II.2: [8] Soient X et Y dans $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ telles que $XN_p + YD_p = I$. Tout compensateur à deux paramètres C stabilisant de manière interne P s'écrit

$$C = (Y - R\tilde{N}_p)^{-1}\begin{pmatrix} Q & X + R\tilde{D}_p \end{pmatrix},$$

où Q et R sont deux éléments arbitraires de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, tels que la matrice $(Y - R\tilde{N}_p)$ ne soit pas singulière.

Le principal intérêt d'un tel résultat est qu'il permet d'écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = W(P, C)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

où la matrice $W(P, C)$ est affine en Q et R, à savoir

$$W = \begin{pmatrix} D_pQ & D_p(Y - R\tilde{N}_p) - I & -D_p(X + R\tilde{D}_p) \\ N_pQ & N_p(Y - R\tilde{N}_p) & -N_p(X + R\tilde{D}_p) \end{pmatrix}.$$

Connaissant désormais la structure d'un compensateur stabilisant, on s'interroge maintenant sur la commande proprement dite, en considérant deux problèmes, qui sont ici à distinguer. On commence par analyser le problème de poursuite de trajectoire. Puis, on analysera celui du rejet de perturbation. Enfin, on spécifiera la structure d'un compensateur stabilisant à deux paramètres, solution de ces deux problèmes de commande.

III. Poursuite de trajectoire

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème de poursuite de trajectoire. La trajectoire est générée par un signal exogène. On décrit une condition suffisante d'existence d'une solution, en effectuant un lien entre la structure du système exogène et celle du compensateur. On supposera dans la suite que tout compensateur considéré est stabilisant, de manière à pouvoir utiliser les résultats du paragraphe précédent.
Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant.

Lemme III.1: [10] Soient A, B et $C \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$, telles que $\det(B) \neq 0$, et (B, C) premières entre elles à gauche. Alors $AB^{-1}C \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$ si et seulement si $AB^{-1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$.

Soit $R_1 \in \mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s})^{l \times q}$ un modèle d'un signal de référence $u_1 = R_1 v_1$, et $(\widetilde{D}_{r_1}, \widetilde{N}_{r_1})$ une factorisation première stable de R_1. Notons que R_1 peut être instable au sens introduit dans la Définition I.1. Le problème de poursuite est formulé de la manière suivante.
On cherche un compensateur à deux paramètres $C(s, \mathrm{e}^{-\theta s})$ défini sur $M(\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s}))$, tel que la paire (P, C) soit stable de manière interne, et la matrice de transfert entre v_1 et $e = u_1 - y_2$ soit stable, avec e l'erreur de poursuite. A partir du Théorème II.2 et de la paramétrisation des matrices de la boucle fermée pour garantir la stabilité interne, le transfert entre u_1 et $e = u_1 - y_2$ s'écrit

$$e = u_1 - y_2 = (I - N_p Q) u_1.$$

Puisque $u_1 = R_1 v_1$, le problème de poursuite se reformule de manière équivalente par la condition

$$(I - N_p Q) \tilde{D}_{r_1}^{-1} \tilde{N}_{r_1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E}). \tag{18}$$

On a donc le résultat suivant.

Théorème III.2: Le problème de poursuite de trajectoire admet une solution si et seulement si il existe une matrice H dans $M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$ telle que

$$N_p Q + H \tilde{D}_{r_1} = I. \tag{19}$$

Preuve. La paire $(\widetilde{D}_{r_1}, \widetilde{N}_{r_1})$ est première à gauche sur $\mathcal{S}_\mathcal{E}$. Ainsi, en utilisant (18) et le Lemme III.1, le problème de poursuite de trajectoire admet une solution si et seulement si

$$(I - N_p Q) \tilde{D}_{r_1}^{-1} \in \mathcal{S}_\mathcal{E}.$$

En notant H un tel élément, et en arrangeant les termes de l'équation, cette condition est équivalente à

$$N_p Q + H \tilde{D}_{r_1} = I.$$

□

Notons qu'à partir de la paramétrisation obtenue des compensateurs stabilisants, nous avons $\widetilde{N}_{c_1} = Q$. Le résultat précédent affirme donc que le problème de poursuite de trajectoire est soluble si et seulement $\widetilde{N}_{c_1}$ et $\widetilde{D}_{r_1}$ sont premières à droite sur $\mathcal{S}_\mathcal{E}$. En d'autres termes, les facteurs invariants de $\widetilde{D}_{r_1}$ doivent être tous distincts de ceux de $\tilde{N}_{c_1}$.
Si R_1 est un système exogène à retards de type neutre formellement stable ou n'est pas de type neutre, alors la condition du Théorème III.2 s'écrit de manière équivalente sur $\mathcal{P}_\mathcal{E}$. Cette reformulation permet de retrouver une notion plus classique en termes de suivi de trajectoire, à savoir

$$T_{v_1 e} = (I - N_p Q) \tilde{D}_{r_1}^{-1} \tilde{N}_{r_1} = H$$

est une matrice de transfert propre et stable sur $\mathcal{E}$. La condition nécessaire et suffisante du Théorème III.2 permet de garantir l'existence d'une solution à la poursuite de trajectoire en termes de l'absence de facteurs communs non triviaux de $\tilde{N}_{c_1}$ et $\tilde{D}_{r_1}$. Cependant, elle ne permet pas de conclure directement sur la structure du compensateur. Pour répondre à cette exigence, on a le résultat suivant.

Théorème III.3: Soit β_{r_1} le plus grand facteur invariant de $\widetilde{D}_{r_1}$. Soient $([N_{c_1}\ N_{c_2}], D_c)$ une factorisation première à droite stable d'un compensateur stabilisant C, et $(\widetilde{D}_p, \widetilde{N}_p)$ une factorisation première à gauche stable de P. Le compensateur C est solution du problème de poursuite de trajectoire si

1. $\beta_{r_1}^{-1} D_c \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$,
2. $N_p(\tilde{N}_{c_2} - \tilde{N}_{c_1}) \tilde{D}_{r_1}^{-1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$.

Preuve. La matrice de transfert entre v_1 et e s'écrit

$$T_{v_1 e} = \left[D_c \tilde{D}_p + N_p (\tilde{N}_{c_2} - \tilde{N}_{c_1}) \right] \tilde{D}_{r_1}^{-1} \tilde{N}_{r_1}.$$

D'après le Lemme III.1, $T_{v_1 e} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$ si et seulement si

$$\left[D_c \tilde{D}_p + N_p (\tilde{N}_{c_2} - \tilde{N}_{c_1}) \right] \tilde{D}_{r_1}^{-1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E}).$$

La forme de Smith de $\widetilde{D}_{r_1}$ s'écrit $\widetilde{D}_{r_1} = USV$, où U et V sont des matrices unimodulaires sur $\mathcal{P}_\mathcal{E}$, et

$$S = \mathrm{diag}(\beta_{1_1}, \ldots, \beta_{r_1}),$$

avec β_{r_1} le plus grand facteur invariant. La matrice inverse de S est

$$S^{-1} = \frac{1}{\beta_{r_1}} \Lambda_{r_1},$$

où $\Lambda_{r_1} = \mathrm{diag}(\lambda_{1_1}, \ldots, \lambda_{r_1})$, $\lambda_{i_1} = \frac{\beta_{r_1}}{\beta_{i_1}} \in \mathcal{P}_\mathcal{E}$, pour $i = 1$ à r_1. Ainsi, si les conditions 1. et 2. sont vérifiées, on a clairement $T_{v_1 e} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$. □

Si le compensateur retenu est tel que $\tilde{N}_{c_2} = \tilde{N}_{c_1}$, la condition suffisante d'existence d'une solution au problème de poursuite de trajectoire est $\beta_{r_1}^{-1} D_c \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$. L'interprétation de ce résultat sur la structure globale du compensateur sera faite au Paragraphe V.

IV. Rejet de perturbation

Intéressons-nous maintenant au rejet de perturbation. Soit $R_2 \in M(\mathbb{R}(s, \mathrm{e}^{-\theta s}))$ un modèle d'un signal de perturbation $u_2 = R_2 v_2$, et $(\widetilde{D}_{r_2}, \widetilde{N}_{r_2})$ une factorisation première stable à gauche de R_2. Le rejet de perturbation consiste à déterminer un compensateur stabilisant tel que la matrice de transfert

$$T_{v_2 y_2} = N_p \tilde{D}_c R_2$$

soit dans $M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$. On a la condition suffisante suivante afin de garantir l'existence d'une solution.

Théorème IV.1: Soit β_{r_2} le plus grand facteur invariant de $\widetilde{D}_{r_2}$. Le rejet de perturbation admet une solution si $\beta_{r_2}^{-1} D_c \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$.

Preuve. Le transfert entre v_2 et y_2 s'écrit

$$T_{v_2 y_2} = N_p \tilde{D}_c R_2 = D_c \tilde{N}_p R_2.$$

En utilisant le Lemme III.1, le rejet de perturbation est équivalent à

$$D_c \tilde{N}_p \tilde{D}_{r_2}^{-1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E}).$$

Supposons que $\tilde{N}_p$ et $\widetilde{D}_{r_2}$ sont premières à droite. Dans ce cas, soit (A, B) une factorisation première stable à gauche de $\tilde{N}_p \tilde{D}_{r_2}^{-1}$. Remarquons que les facteurs invariants de A et de $\widetilde{D}_{r_2}$ sont identiques. En particulier, le lus grand facteur invariant de A est β_{r_2}. Ainsi, le rejet a une solution si et seulement si

$$D_c A^{-1} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E}).$$

La suffisance est alors immédiate. □

Dans la démonstration précédente, nous avons supposés que $\tilde{N}_p$ et $\widetilde{D}_{r_2}$ étaient premières à droite. Si tel n'est pas le cas, ces deux matrices ont donc un facteur commun à droite. Autrement dit, leurs plus grands facteurs invariants, respectivement α_r et β_{r_2}, ont un facteur non trivial en commun, noté f_r. On a donc

$$\alpha_r = \alpha'_r f_r, \;\; \beta_{r_2} = \xi_{r_2} f_r,$$

avec $\alpha'_r, \xi'_{r_2} \in \mathcal{S}_\mathcal{E}$. La condition suffisante de rejet de perturbation est alors $\xi_{r_2}^{-1} D_c \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$.

Pour le rejet de perturbation en sortie, en notant R_3 un modèle exogène de perturbation tel que

$$u_3 = R_3 v_3,$$

le transfert entre v_3 et y_2 s'écrit

$$T_{v_3 y_2} = -N_p \tilde{N}_{c_2} R_3.$$

En prenant $(\tilde{D}_{r_3}, \tilde{N}_{r_3})$ une factorisation première stable à gauche de R_3, et en notant β_{r_3} le plus grand facteur invariant de $\widetilde{D}_{r_3}$, une condition suffisante de rejet de perturbation en sortie est que

$$\beta_{r_3}^{-1} \tilde{N}_{c_2} \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E}).$$

V. Principe du modèle interne et analyse structurelle

A partir des conditions suffisantes établies dans le paragraphe précédent, nous sommes maintenant en mesure de décrire la structure d'un compensateur stabilisant permettant de résoudre le suivi de trajectoire et/ou le rejet de perturbation.

Pour le suivi de trajectoire, nous savons que tout compensateur stabilisant s'écrit sous la forme

$$C = (Y - R\tilde{N}_p)^{-1} \begin{pmatrix} Q & X + R\tilde{D}_p \end{pmatrix},$$

où Q et R sont deux éléments arbitraires de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$, tels que la matrice $(Y - R\tilde{N}_p)$ ne soit pas singulière. A partir des résultats du Paragraphe III, les conditions sur la structure du compensateur se réécrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{D}_c &= \beta_{r_1} W_1, \\ \tilde{N}_{c_1} &= \tilde{N}_{c_2} - W_2 \tilde{D}_{r_1}, \end{aligned}$$

où W_1 et W_2 sont deux éléments de $M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$. La première condition suffisante est déduite de $\beta_{r_1}^{-1} D_c \in M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$, car D_c et $\tilde{D}_c$ ont les mêmes facteurs invariants. De plus, la contrainte de stabilité interne s'écrit

$$\tilde{D}_c D_p + \tilde{N}_{c_2} N_p = I.$$

Ces conditions sont certes d'un aide important pour la synthèse de commande, mais elles ne sont pas directement reliés aux paramètres d'un compensateur stabilisant Q et R. Pour réaliser cette relation, il suffit d'identifier numérateur et dénominateur. Dans cet objectif, supposons que $\tilde{N}_p$ et $\beta_{r_1} I$ sont premières à droites sur $M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$. Il existe U et T dans $M(\mathcal{S}_\mathcal{E})$ telles que

$$T\tilde{N}_p + U\beta_{r_1} = I. \tag{20}$$

Or,

$$R\tilde{N}_p = Y - \beta_{r_1} W_1.$$

En multipliant (20) à gauche par Y, on en déduit par identification que

$$R = YT, \; W_1 = YU.$$

Le paramètre Q, qui n'est autre que $\tilde{N}_{c_1}$, reste quant à lui libre à travers le choix de W_2, c'est-à-dire

$$\tilde{N}_{c_1} = \tilde{N}_{c_2} - W_2 \tilde{D}_{r_1}.$$

L'hypothèse concernant la primarité de $\tilde{N}_p$ et $\beta_{r_1} I$ n'est pas restrictive, comme nous l'avons vu dans les remarques faites après le Théorème IV.1. Ces conditions permettent ainsi de déterminer, par la résolution de deux équations de Bézout, une solution au problème de poursuite de trajectoire.

En ce qui concerne le rejet de pertrubation, la procédure décrite précédemment reste identique. Par exemple, afin d'assurer une poursuite de trajectoire et un rejet de perturbation en entrée, il suffit que le plus petit commun multiple de β_{r_1} et β_{r_2} divise D_c.

La duplication de la dynamique des modèles exogènes (à travers les facteurs invariants) dans celle du compensateur se révèle donc aussi, pour les systèmes à retards de type neutre, suffisante pour résoudre divers problèmes de commande. On retrouve donc le principe du modèle interne [12]. Notons enfin que pour les systèmes à retards de type neutre formellement stables, les conditions suffisantes établies dans cet article sont aussi nécessaires, comme cela advient aussi pour les systèmes à retards de type retardé [13].

VI. Perspectives

Dans ce papier, nous avons mis en évidence la structure d'une compensation afin de résoudre plusieurs problèmes

de commande pour des systèmes à retards de type neutre. Le résultat obtenu consiste, comme pour les systèmes linéaires en dimension finie, à une duplication de signaux exogènes dans la dynamique de compensation.
Ce travail soulève de nombreuses perspectives. La première, est évidemment d'établir des conditions nécessaires pour la résolution des problèmes de commande abordés dans cet article. Cependant, la nécessité des conditions établies requiert la définition d'une topologie sur $\mathcal{E}$ adéquate, qui à ce jour n'a pas été identifiée. Un autre point fondamental est l'étude de la robustesse vis à vis d'incertitudes paramétriques. Cette étude devra tenir compte des problèmes de sensibilité par rapport à de faibles variations des retards [14], [15]. Enfin, la commande optimale de ces systèmes dans un cadre algébrique reste à ce jour une question ouverte.

Références

[1] V. Kolmanovskii et V. R. Nosov. *Stability of functional differential equations.* Academic Press, London, 1986.

[2] J. K. Hale et S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional differential equations.* Springer-Verlag, New-York, 1993.

[3] L. S. Pontryagin. On the zeros of some elementary transcendental functions. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 2(1) :95–110, 1955.

[4] C. I. Byrnes, M. W. Spong, et T. J. Tarn. A several complex variables approach to feedback stabilization of neutral delay-differential systems. *Math. Syst. Theor.*, 17 :97–134, 1984.

[5] D. O'Connor et T. J. Tarn. On stabilization by state feedback for neutral differential difference equations. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, 28(5) :615–618, 1983.

[6] A. Z. Manitius et A. W. Olbrot. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Trans. on Autom. Contr.*, 24(4) :541–553, 1979.

[7] D. Brethé et J. J. Loiseau. Stabilization of time-delay systems. *J. Européen des Systèmes Automatisés*, 31 :1025–1047, 1997.

[8] M. Di Loreto et J. J. Loiseau. Stabilization of neutral time-delay systems. *IFAC Workshop on Time-Delay Systems*, Nantes, France, 2007.

[9] D. Brethé et J. J. Loiseau. Proper stable factorizations for time-delay systems : The multivariable case. *IFAC Time-Delay Systems*, Grenoble, 1998.

[10] M. Vidyasagar. *Control System Synthesis. A Factorization Approach.* MIT Press, Cambridge, Massachussets, 1985.

[11] A. Quadrat. The fractional representation approach to synthesis problems : An algebraic analysis viewpoint. part II : internal stabilization. *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 42(1) :300–320, 2003.

[12] B. A. Francis et W. M. Wonham. The internal model principle for linear multivariable regulators. *J. Appl. Math. Optimization*, 2(2) :170–194, 1975.

[13] M. Di Loreto, J. J. Loiseau, et J. F. Lafay. Internal model principle for time-delay systems of retarded type. *IFAC SSSC*, Iguassu Falls, Brazil, 2007.

[14] R. Bellman et K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations.* Academic Press, New-York, 1963.

[15] D. Henry. Linear autonomous neutral functional differential equations. *J. Differential Equations*, 15 :106–128, 1974.